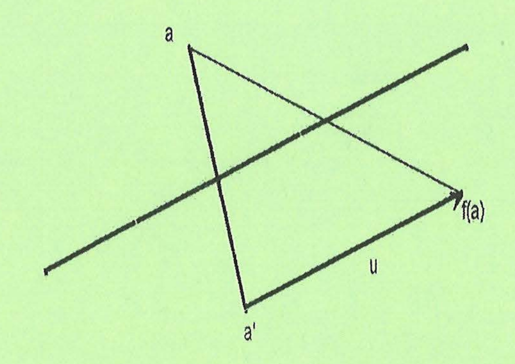
# ESPACIO AFÍN EUCLÌDEO. ISOMETRÌAS

*por*

EUGENIA ROSADO




**CUADERNOS**
**DEL INSTITUTO**
**JUAN DE HERRERA**
**DE LA *ESCUELA DE***
**ARQUITECTURA**
***DE MADRID***

**3-65-02**

# ESPACIO AFÍN EUCLÌDEO. ISOMETRÌAS

*por*

EUGENIA ROSADO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
*DE MADRID*

3-65-02

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
*JUAN DE HERRERA*

NUMERACIÓN

2 Área

51 Autor

09 Ordinal de cuaderno (del autor)

0 VARIOS

1 ESTRUCTURAS

2 CONSTRUCCIÓN

3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS

4 TEORÍA

5 GEOMETRÍA Y DIBUJO

6 PROYECTOS

7 URBANISMO

8 RESTAURACIÓN

I ***Espacio afìn euclìdeo.Isometrìas***

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestiòn y portada : Nadia Soddu.
CUADERNO 301.01 / 3-65-02
ISBN: 978-84-9728-326-57(obra completa )
ISBN-13: 978-84-9728-328-1
Depósito Legal: M- 7205-2010

# Índice

# 1 Espacio afín euclídeo

**Definición** Se dice que un espacio afín $(\mathbb{A}, V, \phi)$ es un *espacio afín euclídeo* si el espacio vectorial $V$ es un espacio vectorial euclídeo.

Recordamos que un espacio vectorial real $V$ es un espacio vectorial euclídeo si está dotado de un producto escalar; esto es, de una aplicación

$$\langle \ , \ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

bilineal, simétrica y definida positiva. Usaremos la notación $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ indistintamente.

**Notación** Denotaremos $E$ a los espacios vectoriales euclídeos y $(\mathbb{E}, E, \phi)$ a los espacios afines euclídeos.

**Definición** Una distancia $d$ en un espacio afín $\mathbb{A}$ es una aplicación

$$d \colon \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R},\ (P, Q) \longmapsto d(P, Q)$$

que cumple:

1. $d$ es definida positiva; esto es, $d(P, Q) \geq 0$ y $d(P, Q) = 0$ si y sólo si $P = Q$.

2. $d$ es simétrica; esto es, $d(P, Q) = d(Q, P)$.

3. $d$ cumple la desigualdad triangular; esto es,$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$.

**Observación** El producto escalar definido en un espacio vectorial $V$ permite definir una distancia $d$ en el espacio afín $(\mathbb{A}, V, \phi)$ de la siguiente manera:

$$d \colon \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R},\ d(P, Q) = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}}.$$

## 1.1 Referencias ortogonales

Un sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ en un espacio afín euclídeo $(\mathbb{E}, E, \phi)$ se dice *ortogonal* (resp. *ortonormal*), si la base $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ del espacio vectorial $V$ es ortogonal (resp. ortonormal).

**Cambio de sistema de referencia ortonormal** Sea $(\mathbb{E}, E, \phi)$ un espacio afín euclídeo de dimensión $n$. Sean $\mathcal{R} = \{O; B\}$ y $\mathcal{R}' = \{O'; B'\}$ dos sistemas de referencia ortonormales de $\mathbb{E}$.

Si $O'(a_1, \ldots, a_n)$ y $M_{B'B}$ es la matriz de cambio de base entonces la matriz del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ es:

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & & & \\ \vdots & & M_{B'B} & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$$

Se verifica que:

1. La matriz $M_{B'B}$ es una matriz ortogonal; esto es, $M_{B'B}^{-1} = M_{B'B}^{T}$.
2. $\det M_{B'B} = \pm 1$. Si $\det M_{B'B} = 1$ se dice que $B'$ y $B$ tienen la misma orientación y si $\det M_{B'B} = -1$ se dice que $B'$ y $B$ tienen distinta orientación.

## 1.2 Subespacios afines ortogonales

Sea $(\mathbb{E}, E, \phi)$ un espacio afín euclídeo de dimensión $n$.

Recordamos que, dado un subespacio vectorial $W \subset E$, el conjunto definido como sigue:

$$\{\vec{v} \in E \mid \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \text{ para todo } \vec{w} \in W\}$$

es un subespacio vectorial de $E$ que denotamos $W^{\perp}$ y llamamos *subespacio ortogonal a $W$* y cumple

$$E = W \oplus W^{\perp}.$$

Por tanto,

$$\dim E = \dim W + \dim W^{\perp}.$$

**Definición** Dos subespacios afines $L_1$ y $L_2$ de $\mathbb{E}$ tales que $\dim \overrightarrow{L_1} + \dim \overrightarrow{L_2} \leq n$ se dicen que son *ortogonales* si sus respectivos subespacios vectoriales asociados $\overrightarrow{L_1}$ y $\overrightarrow{L_2}$ son ortogonales; esto es, cualquier vector $\vec{u} \in \overrightarrow{L_1}$ es ortogonal a cualquier vector $\vec{v} \in \overrightarrow{L_2}$.

Si $\dim \overrightarrow{L_1} + \dim \overrightarrow{L_2} > n$, diremos que $L_1$, $L_2$ son *ortogonales* si $\overrightarrow{L_1}^{\perp}$ y $\overrightarrow{L_2}^{\perp}$ son ortogonales.

*Notación.* Si $L_1$ y $L_2$ son ortogonales, usaremos la notación $L_1 \perp L_2$.

**Definición** Sea $L$ un subespacio afín con subespacio vectorial asociado $\overrightarrow{L}$. Se dice que el subespacio afín $L'$ con subespacio vectorial asociado $\overrightarrow{L'}$ es el *complemento ortogonal* de $L$ si $L$ y $L'$ son ortogonales y además $V = \overrightarrow{L} \oplus \overrightarrow{L'}$.

**Casos particulares**

1. Dos rectas $r = P + \mathcal{L}(\{\vec{v}\})$, $r' = P' + \mathcal{L}(\{\vec{v}'\})$ son ortogonales si y sólo si $\vec{v} \cdot \vec{v}' = 0$.

2. En dimensión 3, una recta $r = P + \mathcal{L}(\vec{v})$ es el subespacio ortogonal a un plano de subespacio vectorial asociado $W$ si $\vec{v}$ es ortogonal a cualquier vector de $W$ (en este caso, $V = W \oplus \mathcal{L}(\vec{v})$).

3. Sea $\pi = P + \mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\})$ un plano afín. La recta $r = P + \mathcal{L}(\{\vec{v}\})$ es ortogonal a $\pi$ si el vector $\vec{v}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$.

4. En dimensión 3, una recta $r = P + \mathcal{L}(\{\vec{v}\})$ es ortogonal a un plano $\pi = P + \mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\})$ si el vector $\vec{v}$ es paralelo al vector normal al plano; esto es, $\vec{v}$ y $\vec{n}$ son paralelos, donde $\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ y $\wedge$ denota el producto vectorial en $\mathbb{E}_3$.

5. En dimensión 3, dos planos $\pi_1$ y $\pi_2$ son ortogonales si sus respectivos vectores normales son ortogonales.

### 1.2.1 Proyección ortogonal de un punto sobre un subespacio afín

Sea $L$ un subespacio afín de un espacio afín euclídeo $\mathbb{E}$ y sea $P$ un punto de $\mathbb{E}$ que no pertenece a $L$ (esto es, $P \in \mathbb{E} \setminus L$). La *proyección ortogonal de $P$ sobre $L$* es el punto $P_0$ intersección de $L$ con el complemento ortogonal a $L$ que contiene al punto $P$; esto es,

$$\mathrm{pr}_L(P) = L \cap S \text{ donde } S \equiv P + \vec{L}^{\perp}$$

## 1.3 Distancia entre dos subespacios afines

Sea $(\mathbb{E}, E, \phi)$ un espacio afín euclídeo de dimensión $n$. Sean $L_1$ y $L_2$ dos subespacios afines de $\mathbb{E}$. Se define la *distancia entre* $L_1$ y $L_2$ como el mínimo de las distancias entre sus puntos; esto es,

$$d(L_1, L_2) = \min\{d(P_1, P_2) \mid P_1 \in L_1 \text{ y } P_2 \in L_2\}.$$

Nótese que si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ entonces $d(L_1, L_2) = 0$.

- Si $L_1$ y $L_2$ son subespacios paralelos, supongamos $\vec{L}_1 \subset \vec{L}_2$ entonces

$$d(L_1, L_2) = d(P, L_2) = \min\{d(P, P_2) \mid P_2 \in L_2\}$$

siendo $P$ un punto arbitrario de $L_1$.

- Si $L_1 = P_1 + \vec{L}_1$ y $L_2 = P_2 + \vec{L}_2$ no son paralelos entonces construimos un subespacio $H$ que sea paralelo a uno de ellos y que contenga al otro. Por ejemplo, podemos tomar $H = P_1 + \vec{L}_1 + \vec{L}_2$. El subespacio $H$ contiene a $L_1$ y es paralelo a $L_2$; por tanto,

$$d(L_1, L_2) = d(H, L_2)$$

y estamos en el caso anterior.

Por tanto, el problema se reduce a calcular la distancia de un punto $P$ a un subespacio $L$.

### 1.3.1 Distancia de un punto $P$ a un subespacio afín $L$

Sea $(\mathbb{E}, E, \phi)$ un espacio afín euclídeo de dimensión $n$. Sea $P \in \mathbb{E}$ y sea $L = Q + \vec{L}$ un subespacio afín de $\mathbb{E}$, con $P \notin L$. Entonces, si llamamos $P_0$ a la proyección ortogonal de $P$ sobre $L$, se tiene:

$$d(P, L) = d(P, P_0) = \left\| \overrightarrow{PP_0} \right\|.$$

A continuación estudiaremos varios casos particulares de distancia entre subespacios afines.

**Distancia de un punto $P$ a un hiperplano $H$** Sea $P$ un punto de coordenadas $(p_1, \ldots, p_n)$ y sea el hiperplano $H$ de ecuación cartesiana $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$.

Si denotamos $P_0$ a la proyección ortogonal de $P$ sobre $H$, se tiene:

$$d(P, H) = d(P, P_0).$$

Sea $\vec{u}$ el vector unitario normal al hiperplano; esto es,

$$\vec{u} = \frac{(a_1, \ldots, a_n)}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}$$

Se cumple:

$$\begin{aligned} d(P,P_0) &= |\overrightarrow{PP_0}\cdot\vec{u}| = \left|(x_1-p_1,\ldots,x_n-p_n)\cdot\frac{(a_1,\ldots,a_n)}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}\right| \\ &= \frac{|a_1x_1+\cdots+a_nx_n-(a_1p_1+\cdots+a_np_n)|}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}} \\ &= \frac{|a_1p_1+\cdots+a_np_n+b|}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}. \end{aligned}$$

**Distancia de un punto $P$ a una recta $r$** Sea $P\in\mathbb{E}$ y sea $r\equiv Q+\mathcal{L}(\{\vec{u}\})$ una recta en $\mathbb{E}$. Denotamos $P_0$ a la proyección ortogonal de $P$ sobre $r$, se tiene:

$$d(P,r)=d(P,P_0),$$

donde $P_0$ es un punto de la recta $r$ que cumple $\overrightarrow{PP_0}\cdot\vec{u}=0$.

**Distancia entre dos rectas que se cruzan en $\mathbb{E}_3$** Sean $r_1\equiv P_1+\mathcal{L}(\{\vec{u}_1\})$ y $r_2\equiv P_2+\mathcal{L}(\{\vec{u}_2\})$ dos rectas en $\mathbb{E}_3$. Construimos un plano paralelo a una de ellas y que contenga a la otra; por ejemplo, el plano $\pi\equiv P_2+\mathcal{L}(\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\})$ es paralelo a la recta $r_1$ y contiene a la recta $r_2$. Y consideramos el vector unitario normal al plano $\pi$; esto es, el vector

$$\vec{u}=\frac{1}{\|\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2\|}\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2$$

donde $\wedge$ denota el producto vectorial en $\mathbb{E}_3$. Se tiene:

$$d(r_1,r_2)=d(r_1,\pi)$$

Consideramos el paralelepípedo cuyas aristas son los vectores $\overrightarrow{P_2P_1}$, $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$. El volumen de dicho paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\overrightarrow{P_2P_1}$; esto es,

$$V=\left|\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2,\overrightarrow{P_2P_1}\right]\right| = \left|\overrightarrow{P_2P_1}\cdot(\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2)\right| = \left\|\overrightarrow{P_2P_1}\right\|\,\|\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2\|\,|\cos\alpha|$$

donde $\alpha$ es el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{P_2P_1}$ y $\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2$.

El área de la base del paralelepípedo es:

$$A=\|\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2\|$$

La distancia entre $r_1$ y $\pi$ es la altura de dicho paralelepípedo. Por tanto,

$$d(r_1,r_2)=d(r_1,\pi)=\frac{\left|\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2,\overrightarrow{P_2P_1}\right]\right|}{\|\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2\|}=\left\|\overrightarrow{P_2P_1}\right\|\,|\cos\alpha|\,.$$

## 1.4 Ángulos

El *ángulo* formado por dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de un espacio vectorial euclídeo, es el número real que denotaremos $(\vec{u}, \vec{v})$ ó $\widehat{\vec{u},\ \vec{v}}$ tal que

$$\cos(\widehat{\vec{u},\ \vec{v}}) = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_1\|\,\|\vec{u}_2\|}$$

## 2 Isometrías

**Definición** Sean $(\mathbb{E}, E, \phi)$ y $(\mathbb{E}', E', \phi')$ dos espacios afines euclídeos. Diremos que una aplicación afín $f\colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ es una *isometría* si

$$d'\left(f(P), f(Q)\right) = d(P, Q), \quad \forall P, Q \in \mathbb{E},$$

donde $d$ es la distancia definida en $\mathbb{E}$ y $d'$ es la distancia definida en $\mathbb{E}'$.

**Observación** Las isometrías son siempre inyectivas ya que si $f(P) = f(Q)$ entonces

$$0 = d'\left(f(P), f(Q)\right) = d(P, Q)$$

implica $P = Q$.

**Proposición** Una aplicación afín $f\colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ es una isometría si y sólo si su aplicación lineal asociada $\bar{f}\colon E \longrightarrow E'$ conserva el producto escalar (esto es, $\bar{f}$ es una isometría vectorial).

**Demostración** Veamos primero que si $f$ es una isometría entonces $\bar{f}$ conserva el producto escalar. Sean $\vec{u}, \vec{v} \in E$ y sea $P \in \mathbb{E}$, entonces se tiene por la definición de espacio afín que existen $A, B \in \mathbb{E}$ tales que $\vec{u} = \overrightarrow{PA}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{PB}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
d'(f(A), f(B))^2 &= \overrightarrow{f(A)f(B)} \cdot \overrightarrow{f(A)f(B)} \\
&= \left(\overrightarrow{f(A)f(P)} + \overrightarrow{f(P)f(B)}\right) \cdot \left(\overrightarrow{f(A)f(P)} + \overrightarrow{f(P)f(B)}\right) \\
&= \overrightarrow{f(A)f(P)} \cdot \overrightarrow{f(A)f(P)} + 2\overrightarrow{f(A)f(P)} \cdot \overrightarrow{f(P)f(B)} \\
&\quad + \overrightarrow{f(P)f(B)} \cdot \overrightarrow{f(P)f(B)} \\
&= d'(f(A), f(P))^2 + 2\overrightarrow{f(A)f(P)} \cdot \overrightarrow{f(P)f(B)} + d'(f(P), f(B))^2 \\
&\underset{f \text{ es isometría}}{=} d(A, P)^2 + 2\bar{f}(\overrightarrow{AP}) \cdot \bar{f}(\overrightarrow{PB}) + d(P, B)^2,
\end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned}
d(A, B)^2 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}\right) \\
&= \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PB} \\
&= d(A, P)^2 + 2\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB} + d(P, B)^2.
\end{aligned}$$

Por tanto, como estamos suponiendo que $f$ es una isometría tenemos

$$d(A, B) = d'(f(A), f(B)),$$

y, por tanto,

$$d(A,P)^2 + 2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB} + d(P,B)^2 = d(A,P)^2 + 2\bar{f}(\overrightarrow{AP})\cdot\bar{f}(\overrightarrow{PB}) + d(P,B)^2,$$

de donde, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB} = \bar{f}(\overrightarrow{AP})\cdot\bar{f}(\overrightarrow{PB})$; esto es,

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \bar{f}(\overrightarrow{u})\cdot\bar{f}(\overrightarrow{v}).$$

Luego $\bar{f}$ es una isometría vectorial.

Recíprocamente, si $\bar{f}$ es una isometría vectorial, entonces

$$\begin{aligned} d(A,B)^2 &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \bar{f}(\overrightarrow{AB})\cdot\bar{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}\cdot\overrightarrow{f(A)f(B)} \\ &= d'(f(A),f(B))^2. \end{aligned}$$

**Proposición** La composición de isometrías es una isometría.

**Observación** Las isometrías afines conservan los ángulos entre subespacios afines ya que

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{\bar{f}(\overrightarrow{u})\cdot\bar{f}(\overrightarrow{v})}{\|\bar{f}(\overrightarrow{u})\|\,\|\bar{f}(\overrightarrow{v})\|} = \cos(\widehat{\bar{f}(\overrightarrow{u}),\bar{f}(\overrightarrow{v})}).$$

**Definición** Un *desplazamiento* ó *movimiento* es una isometría $f$ de un espacio afín euclídeo $\mathbb{E}$ en sí mismo.

## 2.1 Clasificación de isometrías

La aplicación lineal asociada a un movimiento $\bar{f}\colon E \longrightarrow E$, es ortogonal, por tanto, en un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O, B\}$ ortonormal, la matriz asociada a $f$ en esa referencia es de la forma:

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ \overrightarrow{Of(O)} & A \end{pmatrix}$$

donde $A = M_B(\bar{f})$ es una matriz ortogonal; esto es, $A^{-1} = A^t$. Por tanto, $\det A = \pm 1$.

Si $\det A = 1$ se dice que la isometría es *propia* ó *directa*.

Si $\det A = -1$ se dice que la isometría es *impropia* ó *indirecta*.

### 2.1.1 Isometrías en el plano afín euclídeo

Sea $f$ una isometría de un espacio afín euclídeo $\mathbb{E}$ de dimensión 2 en sí mismo. Y sea $\mathcal{R} = \{O, B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\}$ una referencia ortonormal en $\mathbb{E}$. La matriz asociada a $f$ respecto de la referencia $\mathcal{R}$ es

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ \vec{b} & A \end{pmatrix} \text{ con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ y } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de $A$ es $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)$.

**Subespacio de puntos fijos** La ecuación del subespacio de puntos fijos de $f$ es

$$(A - I)X + \vec{b} = \vec{0}.$$

Por tanto, $f$ tiene puntos fijos si la ecuación anterior tiene solución.

Si $\operatorname{rg}(A - I) = 2$ (por tanto también $\operatorname{rg}(A - I|\vec{b}) = 2$) entonces $f$ tiene un único punto fijo.

Si $\operatorname{rg}(A - I) = \operatorname{rg}(A - I|\vec{b}) = 1$ entonces $f$ tiene una recta de puntos fijos.

Si $\operatorname{rg}(A - I) = \operatorname{rg}(A - I|\vec{b}) = 0$ entonces $f$ es la aplicación identidad.

1. Si $\det A = 1$, la isometría $f$ es propia y $A \in SO(2)$ (matrices de orden 2 ortogonales y con determinante 1). Existe un ángulo $\theta$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Nótese que, en este caso, $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + 1$ y $\operatorname{tr}(A) = 2\cos\theta$.

(a) Si $\cos\theta = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A) \neq 1$, entonces $\lambda = 1$ no es autovalor de la matriz $A$ y, por tanto, $\operatorname{rg}(A - I) = 2$ y $f$ tiene un único punto fijo que llamamos $P$. En este caso, $f$ es un *giro de ángulo $\theta$ y centro el punto fijo $P$*. En el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{P, B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\}$ la matriz asociada a $f$ es

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si $\cos\theta = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A) = -1$ entonces $\theta = 180^o$ y $f$ es una *simetría central de centro el punto fijo $P$*.

(b) Si $\cos\theta = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A) = 1$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

y $f$ es una *traslación de vector* $\vec{b}$.

i. $\operatorname{rg}(A-I) = \operatorname{rg}(A-I|\vec{b}) = 0$ entonces $f$ es la *aplicación identidad.*

ii. $\operatorname{rg}(A-I) \neq \operatorname{rg}(A-I|\vec{b})$ entonces $f$ es la *traslación de vector* $\vec{b}$.

2. Si $\det(A) = -1$ la isometría $f$ es impropia y $A \in O(2)$ (matrices de orden 2 ortogonales). Los autovalores de $A$ son $1, -1$. Si tomamos $\vec{u}_1$ autovector asociado a 1 y $\vec{u}_2$ autovector asociado a $-1$, tenemos que en la base $B' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ la matriz asociada a $\vec{f}$ (y que con un abuso de notación seguimos llamando $A$) es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene $\operatorname{rg}(A-I) = 1$.

(a) Si $\operatorname{rg}(A-I|\vec{b}) = 1$ entonces hay una recta de puntos fijos de $f$. Sea $P$ un punto de dicha recta (esto es, un punto fijo de $f$), en la referencia ortonormal $\mathcal{R}' = \left\{P, \left(\frac{1}{\|\vec{u}_1\|}\vec{u}_1, \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2\right)\right\}$ la matriz asociada a $f$ es:

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y $f$ es una *simetría axial.* La recta de puntos fijos $r \equiv P + \mathcal{L}(\{\vec{u}_1\})$ se llama *eje de la simetría.*

(b) Si $\operatorname{rg}(A-I|\vec{b}) = 2$ entonces $f$ no tiene puntos fijos. En la referencia ortonormal $\mathcal{R}' = \left\{O, \left(\frac{1}{\|\vec{u}_1\|}\vec{u}_1, \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2\right)\right\}$ la matriz asociada a $f$ es:

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estudiemos si en este caso hay alguna recta invariante. Sabemos que $V(1) = \mathcal{L}(\{\vec{u}_1\})$ y $V(-1) = \mathcal{L}(\{\vec{u}_2\})$. Calculamos $\overrightarrow{Xf(X)}$.

Sean $(x'_1, x'_2)$ las coordenadas en la referencia $\mathcal{R}'$ de un punto $X$ arbitrario, se tiene:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Xf(X)} &= f(X) - X = (x'_1 + c_1, -x'_2 + c_2) - (x'_1, x'_2) \\ &= (c_1, -2x'_2 + c_2).\end{aligned}$$

Si $-2x'_2 + c_2 = 0$ entonces $\overrightarrow{Xf(X)} \in \mathcal{L}(\{\vec{u}_1\})$. Entonces, la recta de ecuación $-2x'_2 + c_2 = 0$ es una recta invariante de $f$. Si tomamos como origen de la referencia un punto $P$ en dicha recta (luego las coordenadas de $P$ son de la forma $(p, \frac{c_2}{2})$), tenemos que en la referencia $\mathcal{R}' = \left\{P, \left(\frac{1}{\|\vec{u}_1\|}\vec{u}_1, \frac{1}{\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2\right)\right\}$ la matriz de $f$ es:

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se trata de la *composición de una simetría axial de eje la recta invariante $P + \mathcal{L}(\{\vec{u}_1\})$ y una traslación paralela al eje (de vector $(p, 0)$).*

**Observación.** Toda simetría compuesta con traslación se puede descomponer de manera única como una simetría compuesta con una traslación de vector el vector director del eje.

## Cuadro de clasificación

$$\det A = 1 \text{ (entonces } \cos\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A)$$

| | $rg(A - I)$ | $rg(A - I \mid b)$ | Clasificación |
|---|---|---|---|
| $\cos\alpha = 1$ | 0 | 0 $(\bar{b} = \bar{0})$ | Isometría identidad |
| $\cos\alpha = 1$ | 0 | 1 $(\bar{b} \neq \bar{0})$ | Traslación |
| $\cos\alpha \neq 1$ | 2 | 2 | Giro de centro el único punto fijo |

$$\det A = -1$$

| $rg(A - I)$ | $rg(A - I \mid b)$ | Clasificación |
|---|---|---|
| 1 | 1 | Simetría respecto la única recta de puntos fijos |
| 1 | 2 | Simetría deslizante |

**Ejemplo** Clasificar la isometría $f(x_1, x_2) = (1 - x_2, 3 - x_1)$.

Solución

La matriz asociada a esta isometría es

$$M_{\mathcal{RR}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ denoto } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A) = -1$ la isometría es impropia, tiene autovalores $\lambda = -1, 1$ y, en este caso, $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es una autovector asociado al autovalor $\lambda = -1$ y unitario y $\vec{e}_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es una autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$ y unitario. Veamos si $f$ tiene puntos fijos. Como

$$\mathrm{rg}(A - I) = 1 \text{ y } \mathrm{rg}(A - I|\vec{b}) = 2$$

la isometría $f$ no tiene puntos fijos. Se trata de una simetría compuesta con una traslación. Veamos si tiene alguna recta invariante. Vamos a calcularla:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Xf(X)} &= f(X) - X = (1 - x_2, 3 - x_1) - (x_1, x_2) \\ &= (1 - x_1 - x_2, 3 - x_1 - x_2) \in V(-1) \text{ ó } V(1) \end{aligned}$$

Luego, $\overrightarrow{Xf(X)} \in V(-1)$ si y sólo si $\overrightarrow{Xf(X)}$ y $\vec{e}_1$ son proporcionales; esto es, si

$$\begin{aligned} 1 - x_1 - x_2 &= t \\ 3 - x_1 - x_2 &= t \end{aligned}$$

Restando las dos ecuaciones obtenemos $2 = 0$ que es imposible.

Y $\overrightarrow{Xf(X)} \in V(1)$ si y sólo si $\overrightarrow{Xf(X)}$ y $\vec{e}_2$ son proporcionales; esto es, si

$$\begin{aligned} 1 - x_1 - x_2 &= -t \\ 3 - x_1 - x_2 &= t \end{aligned}$$

Restando las dos ecuaciones obtenemos $t = 1$ y por tanto, $\overrightarrow{Xf(X)} \in V(1)$ si y sólo si

$$x_1 + x_2 = 2$$

que es la ecuación de la recta invariante.

Por tanto, $f$ es una simetría deslizante; esto es, una simetría $s$ de eje la recta invariante compuesta con una traslación de vector proporcional al autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$ (vector director de la recta invariante). La matriz de la simetría es

$$M_{\mathcal{RR}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & -1 \\ b & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $a, b$ son tales que $s$ deja fijo cualquier punto de la recta $x_1 + x_2 = 2$. Por ejemplo, imponemos que deja fijo el punto $(1, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & -1 \\ b & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

Calculemos cúal es el vector de traslación:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 + 2 & 0 & -1 \\ v_2 + 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

luego $v_1 = -1$ y $v_2 = 1$.

**Ejemplo** Obtener la expresión analítica de la isometría del plano que es composición de la simetría de eje la recta de ecuación $x_1 + x_2 = 1$ con la traslación de vector $\vec{v} = (1, 2)$. Descomponer la isometría obtenida como composición de una simetría y una traslación de vector paralelo al eje de simetría.

Solución

La recta vectorial asociada al eje de simetría tiene ecuación cartesiana $x_1 + x_2 = 0$.

Considero el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{P, (\vec{u}_1, \vec{u}_2)\}$ donde $P$ es un punto del eje de simetría, por ejemplo, $P(1, 0)$, el vector $\vec{u}_1$ es un vector unitario en la recta $x_1 + x_2 = 0$; por ejemplo $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y el vector $\vec{u}_2$ es un vector unitario y ortogonal a $\vec{u}_1$; esto es, $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. En dicha referencia la matriz asociada a la simetría $S$ de eje $x_1 + x_2 = 1$ es

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(S) &= M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}} M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(S) M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \\
&= M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}} M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(S) (M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}})^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La traslación $T$ de vector $\vec{v} = (1, 2)$ tiene matriz asociada:

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz asociada a la isometría pedida es

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(T \circ S) &= M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(T) M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Y

$$(T \circ S)(x_1, x_2) = (2 - x_2, 3 - x_1).$$

Vamos a descomponer la isometría obtenida como composición de una simetría y una traslación $t_2$ de vector paralelo al eje de simetría. Descomponemos el vector $\vec{v} = (1, 2)$ como suma de un vector de dirección paralela al eje de simetría $s$ y un vector ortogonal a dicho vector:

$$\vec{v} = (1, 2) = a(1, -1) + b(1, 1),$$

de donde $a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{3}{2}$. Por tanto, tomamos la traslación $t_2$ de vector $\vec{v}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Hallamos la simetría $s_2$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & -1 \\ d & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c - \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ d + \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

de donde, $c = \frac{5}{2}$ y $d = \frac{5}{2}$. Luego,

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & -1 \\ \frac{5}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos a calcular la recta de puntos fijos de la simetria $s_2$. Se tiene:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Xs_2(X)} &= \left(\frac{5}{2} - y,\ \frac{5}{2} - x\right) - (x,\ y) \\ &= \left(\frac{5}{2} - x - y,\ \frac{5}{2} - x - y\right) \\ &= \left(\frac{5}{2} - x - y\right)(1,1). \end{aligned}$$

Por tanto, la recta $5 = 2x + 2y$ es la recta de puntos fijos de la simetría $s_2$ (es el eje de simetría).

### 2.1.2 Isometrías en el espacio afín euclídeo tridimensional

Sea $f$ una isometría de un espacio afín euclídeo $\mathbb{E}$ de dimensión 3 en sí mismo. Y sea $\mathcal{R} = \{O, B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\}$ una referencia ortonormal en $\mathbb{E}$. La matriz asociada a $f$ respecto de la referencia $\mathcal{R}$ es

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ \vec{b} & A \end{pmatrix} \text{ con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ y } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de $A$ es $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \operatorname{tr}(A)\lambda^2 - \operatorname{tr}_2(A)\lambda + \det(A)$, donde

$$\operatorname{tr}_2(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**Subespacio de puntos fijos** La ecuación del subespacio de puntos fijos de $f$ es

$$(A - I)X + \vec{b} = \vec{0}.$$

Por tanto, $f$ tiene puntos fijos si la ecuación anterior tiene solución.

Si $\operatorname{rg}(A - I) = 3$ (por tanto también $\operatorname{rg}(A - I|\vec{b}) = 3$) entonces $f$ tiene un único punto fijo.

Si $\operatorname{rg}(A - I) = \operatorname{rg}(A - I|\vec{b}) = 2$ entonces $f$ tiene una recta de puntos fijos.

Si $\operatorname{rg}(A - I) = \operatorname{rg}(A - I|\vec{b}) = 1$ entonces $f$ tiene un plano de puntos fijos.

Si $\operatorname{rg}(A - I) = \operatorname{rg}(A - I|\vec{b}) = 0$ entonces $f$ es la aplicación identidad.

1. Si $\det A = 1$, la isometría $f$ es propia y $A \in SO(3)$ (matrices de orden 3 ortogonales y con determinante 1) y, en una base ortonormal conveniente $B'$ la matriz asociada a $\bar{f}$ se escribe:

$$M_{B'B'}(\bar{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Nótese que, en este caso, $\text{tr}(A) = 1 + 2\cos\theta$.

(a) Si $\cos\theta = 1$, entonces $\text{rg}(A - I) = 0$, entonces pueden pasar dos cosas:

i. $\text{rg}(A - I|\vec{b}) = 0$ y, en este caso,

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $f$ es la aplicación *identidad.*

ii. $\text{rg}(A - I|\vec{b}) = 1$ y, en este caso, no hay puntos fijos y $f$ es una *traslación de vector* $\vec{b}$. La matriz asociada a $f$ en este caso es:

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Si $|\cos\theta| \neq 1$, entonces $\text{rg}(A - I) = 2$ y pueden pasar dos cosas:

i. $\text{rg}(A - I|\vec{b}) = 2$ y, en este caso, hay toda una recta de puntos fijos $r \equiv Q + \mathcal{L}(\{\vec{u}_1\})$, donde $\vec{u}_1$ es autovalor asociado al autovalor $\lambda = 1$. En la referencia $\mathcal{R}' = \left\{Q, \left(\frac{1}{\|\vec{u}_1\|}\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\right)\right\}$ la matriz asociada a $f$ es

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Y $f$ es un *giro ó rotación de angulo $\theta$ y eje la recta $r$ de puntos fijos.*

En el caso particular de que $\cos\theta = -1$, tendríamos una *simetría axial de eje la recta $r$ de puntos fijos.*

ii. $\text{rg}(A - I|\vec{b}) = 3$ y, en este caso, no hay puntos fijos. La matriz asociada a $f$ se puede escribir como sigue:

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y $f$ es un *movimiento helicoidal,* esto es, un giro de ángulo $\theta$ y eje la recta invariante de $f$ con subespacio vectorial asociado $V(1)$, compuesto con una traslación paralela a dicha recta (de vector $\vec{u} = \overrightarrow{Xf(X)}$, con $X \in r$).

2. Si $\det A = -1$, la isometría $f$ es impropia ó indirecta y $A \in O(3)$ (matrices de orden 3 ortogonales) y, en una base ortonormal conveniente $B' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ (el vector $\vec{e}_1'$ es autovector asociado a $\lambda = -1$ y unitario) la matriz asociada a $\bar{f}$ se escribe:

$$M_{B'B'}(\bar{f}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Nótese que, en este caso, $\text{tr}(A) = -1 + 2\cos\theta$.

(a) Si $\cos\theta = 1$ entonces $\text{rg}(A - I) = 1$.

i. Si $\text{rg}(A - I|\vec{b}) = 1$ entonces hay un plano de puntos fijos $\pi \equiv P + \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$. En la referencia $\mathcal{R}' = \left\{Q, \left(\vec{e}_1, \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1, \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2\right)\right\}$ la matriz asociada a $f$ se escribe

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $f$ es una *simetría especular respecto del plano de puntos fijos.*

ii. Si $\text{rg}(A - I|\vec{b}) = 2$ entonces no hay puntos fijos. La matriz asociada a $f$ se puede escribir como sigue:

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $f$ es una *simetría compuesta con una traslación de vector paralelo al plano invariante* ($\vec{v} = (0, c_2, c_3)$).

(b) Si $\cos\theta \neq 1$ entonces $\bar{f}$ no tiene el autovalor $\lambda = 1$ y hay un único punto fijo $Q$. En la referencia ortonormal $\mathcal{R}' = \{Q, (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)\}$ la matriz asociada a $f$ se escribe:

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y $f$ es una *simetría (respecto del plano $Q + \mathcal{L}(\{(\vec{u}_2, \vec{u}_3)\})$) compuesta con una rotación de ángulo $\theta$ y eje $Q + \mathcal{L}(\{(\vec{u}_1)\}$.*

En el caso particular en que $\cos\theta = -1$, entonces $f$ es una *simetría central de centro el único punto fijo $Q$.*

## Cuadro de clasificación

$\det A = 1$

$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A - 1)$

| $rg(A - I)$ | $rg(b \mid A - I)$ | Clasificación |
|---|---|---|
| 0 | 0 $(\bar{b} = \bar{0})$ | Identidad |
| 0 | 1 $(\bar{b} \neq \bar{0})$ | Traslación |
| 2 | 2 | Giro de ángulo $\alpha$ y eje la única recta de puntos fijos |
| 2 | 3 | Movimiento helicoidal (composición de giro y traslación). |

$\det A = -1$

$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A + 1)$

| $rg(A - I)$ | $rg(\bar{b} \mid A - I)$ | Clasificación |
|---|---|---|
| 1 | 1 | Simetría respecto del único plano de puntos fijos |
| 1 | 2 | Simetría deslizante (composición de simetría y traslación de vector paralelo al plano de simetría) |
| 3 | 3 | Composición de giro y simetría (el eje de giro y el plano de simetría son ortogonales). El único punto fijo es la intersección del eje y el plano. |

**Ejercicio 1** En el espacio afín euclídeo $\mathbb{E}_3$ fijamos una referencia ortonormal $\mathcal{R}$ y se considera una isometría afín $h$, cuyas ecuaciones respecto a la referencia dada son:

$$h \equiv \begin{cases} x_1' = -4 + \frac{4}{9}x_1 + \frac{8}{9}x_2 - \frac{1}{9}x_3 \\ x_2' = 4 - \frac{4}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 - \frac{8}{9}x_3 \\ x_3' = -2 - \frac{7}{9}x_1 + \frac{4}{9}x_2 + \frac{4}{9}x_3 \end{cases}$$

Se pide:

1. Escribir su expresión matricial, clasificarla y obtener los elementos notables.

2. Sea $f$ la simetría respecto del plano de ecuación $\pi \equiv 2x_2 + x_3 = 1$. Determinar una transformación $g$, tal que $h = f \circ g$.

3. Clasificar la isometría $g$.

**Solución**

1. La matriz asociada a la isometría $h$ en la referencia $\mathcal{R}$ es:

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ 4 & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -2 & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Llamamos:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Como $\det A = 1$, $h$ es una isometría directa. Los autovalores de $A$ son $\lambda = 1$, $\lambda = \pm i$. Como

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A - I) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} - 1 & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} - 1 & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} - 1 \end{pmatrix} = 2, \\ \operatorname{rg}(A - I|\vec{b}) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} - 1 & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & -4 \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} - 1 & -\frac{8}{9} & 4 \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} - 1 & -2 \end{pmatrix} = 2 \end{aligned}$$

el espacio de puntos fijos de $h$ es una recta y $h$ es un giro de ángulo $\frac{\pi}{2}$ (pues $\cos\theta = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}A - 1) = 0$) y eje la recta de puntos fijos.

Se tiene:

$$
\begin{aligned}
F &= \left\{X \mid (A-I)X + \vec{b} = \vec{0}\right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{9}-1 & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9}-1 & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ x_1 = -x_3, x_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_3 \right\}
\end{aligned}
$$

2. Tomamos una referencia $\mathcal{R}' = \{P, (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)\}$ donde $P \in \pi$, $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \vec{\pi}$ y $\vec{w}_3 \in \vec{\pi}^{\perp}$ y ortogonales entre sí; por ejemplo,$2x_2 + x_3 = 1$

$$
\begin{aligned}
P &= (0,0,1), \\
\vec{w}_1 &= (1,0,0), \\
\vec{w}_2 &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \\
\vec{w}_2 &= \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).
\end{aligned}
$$

La referencia $\mathcal{R}'$ es una referencia ortonormal de $\mathbb{E}_3$ y

$$
M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Se tiene:

$$
\begin{aligned}
M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) &= M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}} M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(f) M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(f) M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Una transformación $g$, tal que $h = f \circ g$ es tal que:

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{RR}}(g) &= M_{\mathcal{RR}}(f)^{-1} M_{\mathcal{RR}}(h) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ 4 & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -2 & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{8}{9} & -\frac{19}{45} & \frac{8}{45} \\ -4 & -\frac{1}{9} & \frac{8}{45} & \frac{44}{45} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Hallamos con MAPLE los autovectores de $A$ (`>eigenvectors(A);` ) siendo:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{19}{45} & \frac{8}{45} \\ -\frac{1}{9} & \frac{8}{45} & \frac{44}{45} \end{pmatrix}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
V(1) &= \mathcal{L}(\{(-1, 0, 5), (8, 5, 0)\}), \\
V(-1) &= \mathcal{L}(\{((5, -8, 1)\}).
\end{aligned}$$

Por tanto, $\det A = -1$ y $g$ es una isometría indirecta. Como

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A - I) &= 1, \text{ (pues } \lambda = 1 \text{ es una autovalor doble)} \\
\operatorname{rg}(A - I|\vec{b}) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} - 1 & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & -4 \\ \frac{8}{9} & -\frac{19}{45} - 1 & \frac{8}{45} & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{8}{45} & \frac{44}{45} - 1 & -4 \end{pmatrix} = 2,
\end{aligned}$$

entonces $g$ no tiene puntos fijos y es una simetría respecto del plano invariante compuesta con un giro de ángulo $180^o$. De hecho sabíamos que $g = f^{-1} \circ h$.

**Ejercicio 2** En el espacio afín euclídeo tridimensional $\mathbb{E}_3$ fijamos una referencia ortonormal $\mathcal{R}$. Se pide:

1. Obtener la expresión matricial del giro $g$ de ángulo $\frac{\pi}{4}$; y eje la recta $r$ de ecuaciones $x_3 - x_1 = 1$ y $x_1 + x_2 = 2$. Describir los subespacios invariantes de $g$.

2. Obtener la expresión matricial de la simetría $s$ respecto al plano $\pi \equiv x_1 - x_2 + x_3 = 2$. Describir los subespacios invariantes de $s$.

3. Obtener la expresión matricial de la composición de $g$ con $s$: $f_1 = s \circ g$. Calcular el subespacio de puntos fijos de $f_1$. Describir los subespacios invariantes de $f_1$.

4. Obtener la expresión matricial de la homotecia $h$ de centro $C = (1,1,2)$ y razón $r = 57$. Describir los subespacios invariantes de $h$.

5. Obtener la expresión matricial de la composición de $g$ con $s$ y con $h$: $f_2 = h \circ f_1$. ¿Es $f_2$ una isometría? Razona tu respuesta. Describir los subespacios invariantes de $f_2$.

**Solución.**

1. Tomamos una referencia $\{P, (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)\}$ donde $P \in r$, $\vec{u}_1 \in \vec{r}$ y $\vec{u}_2, \vec{u}_3 \in \vec{r}^{\perp}$ y ortogonales entre sí; por ejemplo,

$$\begin{aligned} P &= (1,1,2), \\ \vec{u}_1 &= (1,-1,1), \\ \vec{u}_2 &= (1,1,0), \\ \vec{u}_3 &= (1,-1,2). \end{aligned}$$

La referencia $\mathcal{R}' = \left\{P, \left(\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}, \frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|}\right)\right\}$ es una referencia ortonormal de $\mathbb{E}_3$ y

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, haciendo un cambio de referencia obtenemos:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(g) &= M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}} M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(g) M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(g) M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}+3 & \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & \frac{\sqrt{2}}{2}-1 & -1 \\ 2\sqrt{2}-1 & \frac{\sqrt{2}}{2}-1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+1 & -\sqrt{2}+1 \\ -3\sqrt{2}+4 & 1 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Los subespacios invariantes de $g$ son: la recta de puntos fijos (el eje del giro) y los planos ortogonales a la recta de puntos fijos.

2. Tomamos una referencia $\{Q, (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)\}$ donde $Q \in \pi$, $\vec{w}_2, \vec{w}_3 \in \vec{\pi}$ y $\vec{w}_1 \in \vec{\pi}^{\perp}$ y ortogonales entre sí. Nótese que el plano $\pi \equiv x_1 - x_2 + x_3 = 2$ es ortogonal a la recta $r$ del apartado anterior. Por comodidad, vamos a tomar entonces

$$\begin{aligned} Q &= P = (1,1,2), \\ \vec{w}_1 &= \frac{\vec{u}_1}{||\vec{u}_1||}, \\ \vec{w}_2 &= \frac{\vec{u}_2}{||\vec{u}_2||}, \\ \vec{w}_2 &= \frac{\vec{u}_3}{||\vec{u}_3||}. \end{aligned}$$

La referencia $\mathcal{R}' = \{Q, (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)\}$ es una referencia ortonormal de $\mathbb{E}_3$ y

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, haciendo un cambio de referencia obtenemos:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(s) &= M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}} M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(s) M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(s) M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Los subespacios invariantes de $s$ son: el plano de puntos fijos de $s$ (es el plano de simetría) y las rectas ortogonales al plano $\pi$.

3. La expresión matricial de la composición de $g$ con $s$: $f_1 = s \circ g$ es:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f_1) &= M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(s) M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(g) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}-1 & \frac{\sqrt{2}}{2}-1 & \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & 1 \\ 2\sqrt{2}+3 & \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}-1 & -\sqrt{2}-1 \\ -3\sqrt{2} & -1 & \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El subespacio de puntos fijos de $f_1$ es $F = \{P\}$.

Los subespacios invariantes de $f_1$ son: la recta $r$ (eje del giro), el plano $\pi$ (plano de simetría) y el punto $P$.

4. Para hallar la expresión matricial de la homotecia $h$ de centro $C = (1, 1, 2)$ y razón $r = 57$ calculamos $h(O)$. Se verifica:

$$
\begin{aligned}
f(O) &= C + r\overrightarrow{CO} = (1,1,2) - 57(1,1,2) \\
&= (-56, -56, -112)\,.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
M_{\mathcal{RR}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -56 & -57 & 0 & 0 \\ -56 & 0 & -57 & 0 \\ -112 & 0 & 0 & -57 \end{pmatrix}.
$$

Los subespacios invariantes de $h$ son: El centro de la homotecia, las rectas que contienen al centro y planos que contienen al centro.

5. La expresión matricial de la composición de $g$ con $s$ y con $h$: $f_2 = h \circ f_1$ es:

$$
\begin{aligned}
& M_{\mathcal{RR}}(f_2) \\
= \; & M_{\mathcal{RR}}(h) M_{\mathcal{RR}}(f_1) \\
= \; & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 57\sqrt{2}+1 & -\frac{57}{2}\sqrt{2}+57 & -\frac{57}{2}\sqrt{2}-57 & -57 \\ -114\sqrt{2}-227 & -\frac{57}{2}\sqrt{2}-57 & \frac{57}{2}\sqrt{2}+57 & 57\sqrt{2}+57 \\ 171\sqrt{2}-112 & 57 & -57\sqrt{2}-57 & -57\sqrt{2}-57 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

La transformación afín $f_2$ no es una isometría pues $h$ no es una isometría.

Como el centro de la homotecia en el punto fijo de la isometría $f_1$ los subespacios invariantes de $f_2$ son: el centro de la homotecia, la recta $r$ y el plano $\pi$.

# 3 Bibliografía

1. M. Castellet, I. Llerena, *Álgebra lineal y Geometría*, Ed. Reverté, 1994.

2. J. de Burgos, *Curso de Álgebra y Geometría*, Ed. Alhambra, 1980.

3. A. de la Villa, *Problemas de Álgebra con esquemas teóricos*, Ed. CLAGSA, 1994.

# NOTAS

# NOTAS

NOTAS

**CUADERNO**

301.01

cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

